OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS FORHANDLINGER. 1906. N° 1

SUR L'EXCÈS DU NOMBRE DES DIVISEURS DE LA FORME $4n-3$ D'UN ENTIER QUELCONQUE SUR CELUI DES DIVISEURS DE LA FORME $4n-1$

PAR

C. HANSEN

La connaissance de la totalité des diviseurs des différentes formes d'un nombre entier admet la solution d'une quantité de problèmes dans la théorie de nombre. Parmi ces problèmes se trouve celui de la décomposition d'un nombre entier en deux carrés. C'est une chose bien connue que ce problème se laisse ramener à l'étude des nombres des diviseurs des formes $4n-3$ et $4n-1$ d'un nombre entier, et de plus il est démontré que le nombre des décompositions différentes d'un entier impair N en deux carrés est égal à la moitié de l'excès du nombre des diviseurs de N de la forme $4n-3$ sur celui des diviseurs de N de la forme $4n-1$, excepté le cas où N est un carré. Dans ce cas il faut augmenter l'excès indiqué par l'unité pour que le théorème énoncé soit valable [1].

La note suivante est consacrée à l'étude d'une fonction numérique, qui déterminera pour un nombre entier quelconque l'excès du nombre des diviseurs de la forme $4n-3$ sur celui des diviseurs de la forme $4n-1$, et nous allons établir un système de formules de récurrences, au moyen desquelles il sera possible de calculer d'une manière très simple l'excès en question. Dans le cas où le nombre consideré est impair, on a donc la solution du problème de la décomposition en deux carrés.

[1] Voir Dirichlet: Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von Dedekind. Vierte Auflage pag. 229.

$T(n)$ étant le nombre de tous les diviseurs de n, nous désignons par les symboles $T_1(n)$, $T_2(n)$, $T_3(n)$ et $T_4(n)$ les totalités des diviseurs de n des formes $4n-1$, $4n-2$, $4n-3$ et $4n$ respectivement. Nous avons alors l'intention d'examiner la différence $T_1(n) - T_3(n)$.

§ 1. Supposons d'abord que n est un nombre impair. On voit tout de suite que les nombres impairs des formes $4n-1$ et $4n-3$ se présentent de manière très différente à l'égard des nombres de leurs diviseurs des formes $4n-1$ et $4n-3$. Quant aux nombres $4n-1$, il existe le théorème suivant:

Chaque nombre de la forme $4n-1$ possède autant de facteurs de la forme $4n-1$ que de la forme $4n-3$, ou d'après notre notation:

$$T_1(4n-1) - T_3(4n-1) = 0.$$ [1]

Ce théorème est une conséquence du fait, que si l'on divise un nombre $4n-1$ par un autre de la même forme, on aura toujours un quotient de la forme $4n-3$ et vice-versa, en supposant que le quotient est un entier.

Ce théorème n'est pas vrai, si le nombre a la forme $4n-3$. Pour fixer la différence $T_1(4n-3) - T_3(4n-3)$, nous faisons usage de la fonction $\theta_3(\nu, s)$ de Jacobi. Cette fonction est définie par l'expression:

$$\theta_3(\nu, s) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} s^{n^2} \cos 2\pi n\nu.$$ [2]

Soit θ'_3 la dérivée de θ_3 par rapport à ν, on a alors

$$\theta'_3(\nu, s) = -4\pi \sum_{n=1}^{\infty} n s^{n^2} \sin 2\pi n\nu$$

[1]) Quant au problème de la décomposition d'un nombre entier en deux carrés, le théorème énoncé s'exprimera comme suit: Un nombre de la forme $4n-1$ ne peut être la somme de deux carrés. C'est un théorème bien connu.

[2]) Voir par exemple: Jordan, Cours d'analyse, tome II, p. 411.

et par suite:

$$\frac{\theta'_3(\frac{1}{4}, s)}{\theta_3(\frac{1}{4}, s)} = \frac{-4\pi \sum_{n=1}^{\infty} n s^{n^2} \sin \frac{n\pi}{2}}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} s^{n^2} \cos \frac{n\pi}{2}}. \tag{1}$$

Dans la théorie des fonctions θ de Jacobi on trouve la formule[1]):

$$\frac{\theta'_3(\frac{1}{4}, s)}{\theta_3(\frac{1}{4}, s)} = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{s^n}{1 - s^{2n}} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

La série du second membre se laisse transformer de la manière suivante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{s^n}{1 - s^{2n}} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} = -\frac{s}{1 - s^2} + \frac{s^3}{1 - s^6} - \frac{s^5}{1 - s^{10}} + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{s^{2n-1}}{1 - s^{4n-2}}$$

$$= -P(s),$$

en posant: $$P(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{s^{2n-1}}{1 - s^{4n-2}}.$$

En développant la fonction $P(s)$ dans une série de Taylor suivant des puissances de s on obtient:

$$\begin{aligned} P(s) = s + s^3 + s^5 + s^7 + s^9 + s^{11} + s^{13} + s^{15} + \ldots \\ - s^3 \qquad\qquad - s^9 \qquad\qquad - s^{15} - \ldots \\ + s^5 \qquad\qquad\qquad\qquad + s^{15} + \ldots \\ \cdots\cdots \end{aligned}$$

On déduit du second membre de cette équation que le développement de $P(s)$ prendra la forme:

$$P(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \{T_3(4n-3) - T_1(4n-3)\} \, s^{4n-3},$$

[1]) Voir loc. cit. p. 454.

ce qu'on voit facilement en considérant les coefficients des puissances de s.

En se servant de l'équation (1) on a alors la formule importante:

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} n s^{n^2} \sin \frac{n\pi}{2}}{1+2\sum_{n=1}^{\infty} s^{n^2} \cos \frac{n\pi}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ T_3(4n-3) - T_1(4n-3) \right\} s^{4n-3}. \quad (2)$$

Pour simplifier l'écriture nous posons:

$$T_3(4n-3) - T_1(4n-3) = A_n$$

et nous mettons l'équation (2) sous la forme:

$$(1-2s^4+2s^{16}-2s^{36}+\ldots)(A_1 s + A_5 s^5 + A_9 s^9 + A_{13} s^{13} + \ldots)$$
$$= s - 3s^9 + 5s^{25} - 7s^{49} + \ldots$$

En effectuant la multiplication du premier membre et en comparant les coefficients des deux membres, on obtient un système d'équations linéaires, qui servent au calcul des coefficients A_n. Les équations premières sont:

$$\begin{aligned}
&A_1 = 1 \\
&A_2 - 2A_1 = 0 \\
&A_3 - 2A_2 = -3 \\
&A_4 - 2A_3 = 0 \\
&A_5 - 2A_4 + 2A_1 = 0 \\
&A_6 - 2A_5 + 2A_2 = 0 \\
&A_7 - 2A_6 + 2A_3 = 5 \\
&A_8 - 2A_7 + 2A_4 = 0 \\
&A_9 - 2A_8 + 2A_5 = 0 \\
&A_{10} - 2A_9 + 2A_6 - 2A_1 = 0 \\
&A_{11} - 2A_{10} + 2A_7 - 2A_2 = 0 \\
&A_{12} - 2A_{11} + 2A_8 - 2A_3 = 0 \\
&A_{13} - 2A_{12} + 2A_9 - 2A_4 = -7 \\
&A_{14} - 2A_{13} + 2A_{10} - 2A_5 = 0
\end{aligned}$$

$$A_{15}-2A_{14}+2A_{11}-2A_{6} = 0$$
$$A_{16}-2A_{15}+2A_{12}-2A_{7} = 0$$
$$A_{17}-2A_{16}+2A_{13}-2A_{8}+2A_{1} = 0$$

On voit tout de suite comment ces équations doivent se former. Les quantités A_n du premier membre sont alternativement positives et négatives et portent des indices, dont les différences forment une progression arithmétique avec la différence 2. Quant aux nombres qui figurent au second membre, ils ont la valeur zéro toutes les fois que $4n-3$ n'est pas un carré; dans ce cas le nombre du second membre est $+$ ou $-\sqrt{4n-3}$ selon que $\sqrt{4n-3}$ est de la forme $4n-3$ ou $4n-1$.

Nous avons donc établi un système de formules de récurrences qui admettent le calcul successif des différences

$$A_n = T_3(4n-3)-T_1(4n-3)$$

sans décomposer le nombre n en facteurs.

§ 2. Pour évaluer la différence

$$T_3(n)-T_1(n)$$

nous considérons la fonction analytique

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{1+s^{2n}}. \tag{3}$$

La série du second membre est convergente pour chaque valeur de s, dont le module reste inférieur à l'unité[1]).

La fonction $\Phi(s)$ est étroitement liée à la fonction numérique $T_1(n)-T_3(n)$, ce que nous allons démontrer.

De l'équation (3) on tire:

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(s^n - s^{3n} + s^{5n} - s^{7n} + \ldots) =$$

[1]) Weierstrass a démontré que le cercle de convergence est une coupure essentielle pour la série $\sum \frac{s^n}{1+s^{2n}}$.

Voir Weierstrass: Abhandlungen aus der Funktionenlehre, p. 80.

$$= \sum s^n - \sum s^{3n} + \ldots$$

$$= \frac{s}{1-s} - \frac{s^3}{1-s^3} + \frac{s^5}{1-s^5} - \ldots$$

et par suite:

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{1+s^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{s^{2n-1}}{1-s^{2n-1}}. \tag{4}$$

Pour avoir la série de Taylor de la fonction $\Phi(s)$, nous développons chaque terme $\frac{s^{2n-1}}{1-s^{2n-1}}$ suivant des puissances de s et nous obtenons alors:

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \{T_3(n) - T_1(n)\}\, s^n, \tag{5}$$

ce qu'on voit en remarquant que l'on obtient précisément autant de termes s^n avec le coefficient $+1$, qu'il y a de facteurs en n de la forme $4n-3$, et autant de termes s^n avec le coefficient -1, qu'il y a de facteurs en n de la forme $4n-1$.

La fonction $\Phi(s)$ se laisse exprimer par la fonction $\theta(\nu, s)$ de Jacobi. D'après la théorie de cette fonction on a la formule[1]):

$$\frac{\theta'(\nu, s)}{\theta(\nu, s)} = \pi \cot \pi\nu + 4\pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{s^{2n}}{1-s^{2n}} \sin 2\pi\, n\nu \tag{6}$$

où

$$\theta(\nu, s) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin\,(2n+1)\,\pi\nu.$$

$\theta'(\nu, s)$ est la dérivée de $\theta(\nu, s)$ par rapport à ν.

En remplaçant s par s^4 et en posant $\nu = \frac{1}{4}$ on déduit de l'équation (6):

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^{(2n+1)^2} (2n+1) \cos\,(2n+1)\,\frac{\pi}{4}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^{(2n+1)^2} \sin\,(2n+1)\,\frac{\pi}{4}} =$$

[1]) Voir Jordan: Cours d'analyse, tome II, p. 409 et 453.

$$= 1+4\left\{\frac{s^8}{1-s^8}-\frac{s^{24}}{1-s^{24}}+\frac{s^{40}}{1-s^{40}}\cdots\right\}$$

$$= 1+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ \frac{s^{8(2n-1)}}{1-s^{8(2n-1)}}.$$

Or

$$(-1)^n\ \cos(2n+1)\,\frac{\pi}{4} = \sin(2n+1)\,\frac{\pi}{4}$$

et

$$(-1)^n\ \sin(2n+1)\,\frac{\pi}{4} = \cos(2n+1)\,\frac{\pi}{4},$$

et l'équation précédente peut s'écrire:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{s^{8(2n-1)}}{1-s^{8(2n-1)}}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,s^{(2n+1)^2}\,\sin(2n+1)\,\frac{\pi}{4}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}s^{(2n+1)^2}\,\cos(2n+1)\,\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{4}.$$

D'autre part on a à cause de l'équation (5):

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{s^{8(2n-1)}}{1-s^{8(2n-1)}} = \sum_{n=1}^{\infty}\{T_3(n)-T_1(n)\}\ s^{8n},$$

et il en résulte l'identité:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{T_3(n)-T_1(n)\}\ s^{8n}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,s^{(2n+1)^2}\,\sin(2n+1)\,\frac{\pi}{4}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}s^{(2n+1)^2}\,\cos(2n+1)\,\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{4}. \qquad (7)$$

Nous posons pour abréger:

$$B_n = 4\,[T_3(n) - T_1(n)], \tag{8}$$

et l'équation précédente peut s'écrire:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n\, s^{8n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2n+1)\,\frac{\pi}{4} \cdot s^{(2n+1)^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, s^{(2n+1)^2} \sin(2n+1)\,\frac{\pi}{4}\,.$$

B_0 est égal à l'unité.

En multipliant les deux séries du premier membre et en exprimant que l'équation sera satisfaite identiquement, on obtient un système infini d'équations linéaires, au moyen desquelles on doit calculer les coefficients B_n. Les premières équations sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
&B_0 = 1\\
&B_1 - B_0 = 3\\
&B_2 - B_1 = 0\\
&B_3 - B_2 - B_0 = -5\\
&B_4 - B_3 - B_1 = 0\\
&B_5 - B_4 - B_2 = 0\\
&B_6 - B_5 - B_3 + B_0 = -7\\
&B_7 - B_6 - B_4 + B_1 = 0\\
&B_8 - B_7 - B_5 + B_2 = 0\\
&B_9 - B_8 - B_6 + B_3 = 0\\
&B_{10} - B_9 - B_7 + B_4 + B_0 = 9\\
&B_{11} - B_{10} - B_8 + B_5 + B_1 = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Pour former ces équations nous remarquons que les différences des indices qui figurent aux premiers membres forment une progression arithmétique avec la différence 1. Les signes sont ceux de $\cos(2p+1)\,\frac{\pi}{4}$, en désignant par p le numéro du terme considéré.

Le système d'équations permet de calculer les quantités B_n et par conséquent, d'après la relation (8), la différence $T_3(n)-T_1(n)$ pour chaque valeur de n.

§ 3. Nous terminons cette note en exposant une propriété remarquable que possède la fonction numérique $T_3(n)-T_1(n)$. Comme nous allons le démontrer, la fonction $T_3(n)-T_1(n)$ est bien définie si l'on la connaît pour chaque valeur de n de la forme $4n-3$; en effet, la connaissance des valeurs de $T_3(n)-T_1(n)$ pour toute valeur de n de la forme $4n-3$ implique entièrement la connaissance de cette fonction pour une valeur quelconque de n.

Pour le faire voir nous allons établir une équation fonctionelle, à laquelle doit satisfaire la fonction $\Phi(s)$.

$$\Phi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{1+s^{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\{T_3(n)-T_1(n)\}\,s^n.$$

En y remplaçant s par is on aura:

$$\Phi(is)=\frac{is}{1-s^2}-\frac{s^2}{1+s^4}-\frac{is^3}{1-s^6}+\frac{s^4}{1+s^8}+\frac{is^5}{1-s^{10}}\cdots \tag{9}$$

$$=i\left\{\frac{s}{1-s^2}-\frac{s^3}{1-s^6}+\frac{s^5}{1-s^{10}}-\frac{s^7}{1-s^{14}}+\cdots\right\}$$

$$-\left\{\frac{s^2}{1+s^4}-\frac{s^4}{1+s^8}+\frac{s^6}{1+s^{12}}-\frac{s^8}{1+s^{16}}+\cdots\right\}$$

D'après l'équation (4) on peut écrire:

$$\Phi(s)=\frac{s}{1-s}-\frac{s^3}{1-s^3}+\frac{s^5}{1-s^5}-\frac{s^7}{1-s^7}+\cdots$$

et par suite:

$$\Phi(-s)=-\frac{s}{1+s}+\frac{s^3}{1+s^3}-\frac{s^5}{1+s^5}+\frac{s^7}{1+s^7}\cdots$$

On trouve ainsi:

$$\Phi(s)-\Phi(-s)=\frac{s}{1-s}+\frac{s}{1+s}-\frac{s^3}{1-s^3}-\frac{s^3}{1+s^3}+\frac{s^5}{1-s^5}+\frac{s^5}{1+s^5}\cdots \tag{10}$$

$$=2\left\{\frac{s}{1-s^2}-\frac{s^3}{1-s^6}+\frac{s^5}{1-s^{10}}\cdots\right\}$$

De plus on a:

$$\Phi(s^2) = \frac{s^2}{1+s^4} + \frac{s^4}{1+s^8} + \frac{s^6}{1+s^{12}} + \frac{s^8}{1+s^{16}} + \dots$$

et $$\Phi(s^4) = \frac{s^4}{1+s^8} + \frac{s^8}{1+s^{16}} + \dots$$

et par conséquent:

$$\Phi(s^2) - 2\Phi(s^4) = \frac{s^2}{1+s^4} - \frac{s^4}{1+s^8} + \frac{s^6}{1+s^{12}} - \frac{s^8}{1+s^{16}} + \dots \quad (11)$$

En tenant compte des équations (10) et (11), l'équation (9) peut s'écrire sous la forme:

$$\Phi(is) = \frac{i}{2}\{\Phi(s) - \Phi(-s)\} - \Phi(s^2) + 2\Phi(s^4) \quad (12)$$

Nous avons donc une équation fonctionelle, à laquelle satisfait la fonction $\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{1+s^{2n}}$.

Examinons alors si cette équation fonctionelle suffit pour définir la fonction $\Phi(s)$. Pour résoudre ce problème nous allons chercher toutes les solutions de l'équation (12), qui sont holomorphes au voisinage du point $s = 0$.

Posons: $$\Phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n \quad (13)$$

où cette série est supposée convergente, et tâchons de déterminer les coefficients c_n, de telle sorte que cette fonction soit une solution de l'équation (12).

De (13) on tire:

$$\frac{i}{2}[\Phi(s) - \Phi(-s)] = i\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} s^{2n-1},$$

$$\Phi(s^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^{2n}$$

et $$\Phi(s^4) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^{4n}$$

De plus on a:

$$\Phi(is) = c_0 + ic_1 s - c_2 s^2 - ic_3 s^3 + c_4 s^4 + ic_5 s^5 - c_6 s^6 \dots$$

En substituant toutes ces expressions dans l'équation (12) on obtient l'identité:

$$c_0 + ic_1 s - c_2 s^2 - ic_3 s^3 + c_4 s^4 + ic_5 s^5 - c_6 s^6 - ic_7 s^7 + c_8 s^8 + ic_9 s^9 - c_{10} s^{10} \dots$$
$$= c_0 + ic_1 s - c_1 s^2 + ic_3 s^3 + (2c_1 - c_2) s^4 + ic_5 s^5 - c_3 s^6 + ic_7 s^7 + (2c_2 - c_4) s^8$$
$$+ ic_9 s^9 - c_5 s^{10} + \dots$$

ɔ:
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{4n} s^{4n} - \sum_{n=1}^{\infty} c_{4n-2} s^{4n-2} + i \sum_{n=1}^{\infty} c_{4n-3} s^{4n-3} - i \sum_{n=1}^{\infty} c_{4n-1} s^{4n-1}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (2c_n - c_{2n}) s^{4n} - \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} s^{4n-2} + i \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} s^{2n-1}.$$

En comparant les coefficients des deux membres de cette identité on aura les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} c_{4n} &= 2c_n - c_{2n} \\ c_{4n-2} &= c_{2n-1} \\ c_{4n-1} &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Ces conditions doivent être remplies pour toute valeur de n, pour que la série convergente $\sum_{n=0}^{\infty} c\ s^n$ devienne une solution de l'équation fonctionelle (12).

Considérons ces conditions. Elles montrent que tous les coefficients c_{4n} et c_{4n-2} se laissent exprimer par les coefficients c_{4n-3} et c_{4n-1} pour chaque valeur de n. Quant aux coefficients c_{4n-1} ils sont tous égaux à zéro. On tire du système (14):

$c_2 = c_1$; c_1 peut être choisi arbitrairement
$c_3 = 0$
$c_4 = 2c_1 - c_2 = c_1$
c_5 peut être choisi arbitrairement
$c_6 = c_3 = 0$
$c_7 = 0$
$c_8 = 2c_2 - c_4 = c_1$

c_9 peut être choisi arbitrairement

$$c_{10} = c_5$$
$$c_{11} = 0$$
$$c_{12} = 2c_3 - c_6 = 0$$

et ainsi de suite.

En autres termes, étant donné les coefficients c_{4n-3} pour toutes valeurs de n, tous les autres coefficients du développement $\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n s^n$ sont entièrement déterminés par les relations (14), si la fonction $\Phi(s)$ sera une solution de l'équation fonctionelle (12); il va sans dire qu'il faut choisir les coefficients c_{4n-3} de telle manière que la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n s^n$ soit convergente.

Appliquons ce résultat à la fonction

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \{T_3(n) - T_1(n)\} s^n.$$

Nous savons qu'elle est une solution de l'équation (12); il suit de là que, supposant connue la valeur de la fonction numérique

$$T_3(n) - T_1(n)$$

pour tous nombres de la forme $4n-3$, cette connaissance permet d'évaluer la fonction en question pour une valeur quelconque de n d'une manière très simple à l'aide des relations (14) en posant $c_n = T_3(n) - T_1(n)$.